



# Istituto di Istruzione Superiore "ITALO CALVINO"

COMMISSIONE MILI02068 – MILI02069

## SECONDA PROVA SCRITTA DELL'ESAME DI STATO - a.s. 2021-2022

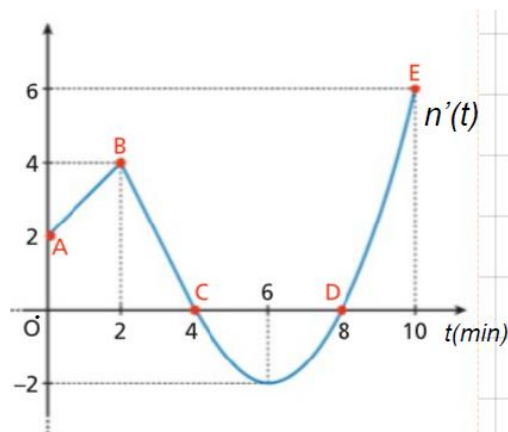
### Traccia n°3 Indirizzo Liceo Scientifico

**Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti e indichi chiaramente le proprie scelte. Si giustificino tutte le risposte.**

*Durata massima della prova: 6 ore. È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8). È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.*

#### **PROBLEMA 1**

La seguente figura rappresenta la rapidità di afflusso/deflusso  $n'(t)$  dei clienti di un negozio in 10 minuti. I tratti AB e BC sono segmenti di retta, il tratto CDE appartiene a un arco di parabola con asse parallelo all'asse  $y$ .



- Scrivi l'equazione della funzione  $n'(t)$  e verifica che in C sia derivabile. Ricava poi l'equazione  $n(t)$  che rappresenta il numero di persone presenti in negozio all'istante  $t$  sapendo che il numero di clienti all'istante iniziale è 0. Rappresenta graficamente la funzione  $n(t)$ .
- Calcola col metodo che ritieni più opportuno il numero  $n(t)$  di clienti presenti nel negozio dopo 2 minuti, dopo 4 minuti e dopo 10 minuti. In quale momento si ha il massimo numero di presenze nel negozio?
- Verifica che la funzione  $n(t)$  soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo  $[0; 10]$  e determina i valori che soddisfano la tesi del teorema.
- Il negozio vende borracce con capacità di 1 litro a forma cilindrica. Quale deve essere il raggio di base e l'altezza della borraccia per minimizzare la superficie e quindi il calore disperso all'esterno?



# Istituto di Istruzione Superiore “ITALO CALVINO”

COMMISSIONE MILI02068 – MILI02069

## PROBLEMA 2

Sia  $f(x)$  una funzione tale che:

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = A \qquad \int_{-2}^1 f(x) dx = B + A \qquad \int_1^2 f(x) dx = A - B$$

a. Calcola, se possibile, i seguenti integrali in funzione di  $A$  e  $B$ :

$$\int_0^1 f(x) dx \qquad \int_{-2}^2 f(x) dx \qquad \int_0^2 f(x) dx \qquad \int_{-1}^2 f(x) dx \qquad \int_4^8 f\left(\frac{x}{4}\right) dx$$

b. Individua fra le seguenti funzioni quali non possono rappresentare  $f(x)$ , motivando le tue affermazioni.

$$y_1 = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} \qquad y_2 = \frac{x}{x^2 - 9} \qquad y_3 = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

- c. Studia l'andamento della funzione che può rappresentare  $f(x)$  tra quella riportate al punto b e tracciane il grafico.
- d. Calcola l'area della superficie di piano compresa fra la funzione e il suo asintoto orizzontale per  $x \geq 4$ .



# Istituto di Istruzione Superiore “ITALO CALVINO”

COMMISSIONE MILI02068 – MILI02069

## QUESITI

### QUESITO 1

Calcola l'area della regione finita di piano compresa tra la parabola di equazione  $\gamma_1: y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ , la parabola di equazione  $\gamma_2: y = x^2 - 10x + 27$ , la retta tangente a  $\gamma_1$  nel vertice e la retta tangente a  $\gamma_2$  nel punto  $P(6,3) \in \gamma_2$ .

### QUESITO 2

Considera la regione illimitata di piano compresa tra la funzione  $f(x) = e^{-|x|}$  e l'asse  $x$ . Stabilisci se il solido ottenuto da una rotazione completa di tale regione intorno all'asse  $x$  ha volume finito e in tal caso specificane il valore.

### QUESITO 3

Sia data la funzione  $f(x)$  definita e continua in  $[1; +\infty)$  e sia  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ . Calcola il limite seguente, sapendo che  $f(1) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{\sin(x-1)}.$$

### QUESITO 4

Sia  $f$  una funzione tale che  $f(0) = f(4)$ . Dimostra con esempi e controesempi che le ipotesi del teorema di Rolle sono sufficienti ma non necessarie per la funzione  $f$  nell'intervallo  $[0;4]$ .

### QUESITO 5

Determina i valori di  $a$  e  $b$  affinché la funzione  $f(x) = \begin{cases} b + \sqrt{x^2 + 15} & x \leq 1 \\ a \ln x + (2b + 1)x & x > 1 \end{cases}$  sia continua e derivabile in  $\mathbb{R}$ .

### QUESITO 6

Sia data una sfera di raggio  $r$  inscritta in un cubo. Se si sceglie a caso un punto  $P$  interno al cubo, è corretto affermare che la probabilità che esso si trovi esternamente alla sfera è superiore al 50%? Motivare adeguatamente la risposta.

### QUESITO 7

Verifica che l'equazione differenziale assegnata abbia tra le soluzioni la funzione  $y(x)$  indicata:

$$y'' = 2y' - 2y + 2x^2 - 4x, \quad y(x) = x^2 - 1 - e^x \sin x.$$



# Istituto di Istruzione Superiore "ITALO CALVINO"

COMMISSIONE MILI02068 – MILI02069

## QUESITO 8

Di seguito trovi il grafico di  $f(x)$ , di una sua primitiva  $F(x)$ , della sua derivata  $f'(x)$  e di  $g(x) = \ln f(x)$ . Associa ogni grafico alla sua funzione, giustificando la tua scelta.

